Práctica 1: Juegos Combinatorios

---

1. Demuestre que si $(\mathbb{X}, F)$ es un grafo progresivamente acotado, existe al menos un nodo x tal que $F(x)$ son todos nodos terminales.
2. Construya ejemplos para grafos $(\mathbb{X}, F)$ (que no sean árboles) donde:
   a) no existe una partición P-N.
   b) ningún nodo es P ó N.
   c) $\#(\mathbb{X}) \geq 4$, pero $P = \{x\}$, $N = \{y\}$.
3. Encuentre las posiciones P de los juegos de sustracción con una pila de n fichas y (a) $S = \{1, 3, 5, 7\}$, (b) $S = \{1, 3, 6\}$, (c) $S = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$,
4. De una pila de n fichas, se sustraen fichas con $S = \{1, 2, 3\}$. Considere la versión misére (el último en mover pierde). Cuáles son las posiciones P?
5. De una pila de n fichas, el primer jugador sustrae una o más fichas sin llevarse toda la pila. Luego, se alternan y no está permitido retirar más fichas que las que retiró el rival en la movida anterior. Hallar las posiciones P.
6. Analizar el juego de Nim en versión misère (el último en mover pierde). Para esto: estudiar primero las configuraciones $(1, .., 1)$, luego $(x, 1.., 1)$ con $x \geq 2$ y finalmente ver que $(x, y, z, ..., 1.., 1)$ (con $x, y, z, ... \geq 2$) es N_{misere} ssi es N_{normal} (jugar como en el Nim normal y ver que necesariamente en algún momento llegamos a una configuración $(x, 1..., 1)$, $x \geq 2$)).
7. **Treinta y Uno, Geoffrey Mott-Smith (1954):** Se juega con las cartas As, 2, 3, 4, 5, y 6 de cada palo, colocadas boca arriba. Los jugadores van quitando una carta cada uno y sumando el valor de la carta elegida (el As vale 1). El que suma más de 31, pierde.

   Demuestre que si lo juega con la estrategia de un juego de sustracción con $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (es decir, sin límite de las veces que se puede usar cada número de S), el 1ero que juega tiene una estrategia ganadora.
8. **Vacíe y divida, Ferguson (1998):** Hay dos pilas con n y m fichas. Esta posición la notamos (n, m). Los jugadores se alternan, el último en mover gana, y una movida consiste en eliminar una de las pilas, y dividir la otra en dos pilas, ninguna vacía. La posición terminal es $(1, 1)$. Encuentre las posiciones P.
9. **Nimble:** En una fila de casillas numeradas desde 0 se colocan finitas monedas (puede haber más de una en la misma casilla). Una movida consiste en transportar una de las moneda hacia la izquierda, un número arbitrario de casillas. El juego termina cuando todas estén en la casilla 0. Analice este juego hasta descubrir cómo jugarlo óptimamente.
10. En un tablero de ajedrez hay una torre negra y una blanca en cada columna. Pueden subir y bajar por la columna, pero no comerse ni saltar. El juego termina cuando uno de los jugadores no tiene más movimientos.
    a) Demuestre que el juego es partisano y no es progresivamente acotado.

b) Analice este juego hasta descubrir cómo jugarlo óptimamente.

11. **Escalera, Sprague (1937):** Una escalera de n escalones tiene monedas en los mismos, y con $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indicamos que hay x_j monedas en el escalón $j-$ésimo. Una movida consiste en desplazar $1 \leq k \leq x_j$ monedas del escalón j al $j-1$. Cuando llegan al suelo, son removidas. El juego termina cuando todas son removidas, y el último en jugar gana. Hallar las posiciones P.

12. **Nim-k, Moore (1910):** Hay n pilas de fichas, y se juega como el Nim, sólo que cada jugador puede quitar una o más fichas de k pilas (k fijo). Hallar las posiciones P. (Hint: desarrollando en base 2, el número de unos en cada columna es cero módulo $k+1$).

13. **Chomp!, Schuh (1952) y Gale (1974):** Dada una matriz $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, cada Los jugadores se alternan, y una movida consiste en elegir un coeficiente $a_{i_0 j_0}$ (que no está tachado) y tachar todos los coeficientes a_{ij} con $1 \leq i \leq i_0$, $1 \leq j \leq j_0$. El que tacha el coeficiente a_{nm}, pierde. Demuestre que Xérez tiene una estrategia ganadora.

14. Hay tres pilas con i, j y k fichas, $i, j, k \geq 1$. Esta posición la notamos (i, j, k). Los jugadores se alternan, el último en mover gana, y una movida consiste en eliminar dos pilas, y dividir la otra en tres pilas, ninguna vacía. Encuentre las posiciones P.

Función de Sprague-Grundy

15. Hallar la función de Sprague-Grundy para los siguientes juegos de sustracción:

    a) Se puede quitar un número par de fichas de cualquier pila, o remover una pila con una única ficha.
    b) De una pila de se pueden quitar como máximo la mitad de las fichas. Las posiciones terminales son 0 y 1.
    c) De una pila de fichas, se puede quitar cualquier cantidad divisible por 3 (salvo la pila entera); o se puede quitar la pila entera si el número de fichas es igual a $2(mod 3)$. Verificar que las posiciones terminales son 0, 1 y 3.
    d) De una pila de fichas, se pueden quitar uno o dos fichas, o quitar una ficha y dividir las que quedan en dos pilas.
    e) Se puede remover alguna pila con una única ficha, o sacar dos o más de una pila y si se desea separar las fichas restantes en dos pilas.
    f) Se pueden quitar c fichas de alguna pila si $c \equiv 1(mod 3)$ y, si se desea, dividir los que quedan en dos pilas.

16. Demostrar que las funciones de Sprague-Grundy de juegos de sustracción con S finito son periódicas (a partir de cierto $n_0 = n_0(S)$).

17. Sea g la función de Sprague-Grundy de un juego de sustracción. Probar que si se permite retirar toda la pila en cualquier movida, la función de Sprague-Grundy $h(x)$ de este juego satisface
$$h(x) = g(x-1) + 1 \qquad x > 1.$$

18. Sea $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dada una fila de monedas, invertir una o dos; la de la derecha debe ir de cara a ceca. Si se invierten dos, la distancia entre ambas debe estar en S. Relacionar la función de Sprague-Grundy de este juego con la del juego de sustracción S.

19. Hay dos pilas con n y m fichas, (n, m). Los jugadores se alternan, el último en mover gana, y una movida consiste en eliminar entre 1 y 4 fichas de la primer pila, o entre 1 y 5 de la segunda. Hallar las posiciones P.

20. Sean tres juegos de substracción G_i, con $S_1 = \{1, 3, 4\}$, $S_2 = \{2, 4, 6\}$, y $S_3 = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Hallar las posiciones P de $G_1 + G_2 + G_3$.